

# Hareketli bir Hedefin Hız-Kısıtlamalı Erkinlerden oluşan bir Robot Sürüsü ile Yapay Potansiyel Fonksiyonlar ve Kayan Kip Yöntemi Kullanılarak Takibi

Murat İlter Köksal<sup>1</sup>, Veysel Gazi<sup>1</sup>, Barış Fidan<sup>2</sup> ve Raúl Ordóñez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü,  
Söğütözü Cad. No: 43, 06560 Ankara, Türkiye,

{vgazi, i.koksal}@etu.edu.tr

<sup>2</sup>National ICT Australia Ltd. ve Ulusal Avustralya Üniversitesi,  
Bilişim Bilimleri ve Mühendisliği Bölümü, Canberra, Avustralya,

Baris.Fidan@anu.edu.au

<sup>3</sup>Dayton Üniversitesi, Elektrik ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümü,  
300 College Park, Dayton, OH 45469-0232, ABD,

ordonez@ieee.org.

## Özetçe

Bu makalede hareketli bir hedefin hız-kısıtlamalı (non-holonomic) robotlardan oluşan bir sürü tarafından takibi incelenecektir. Hedef ve erkinler, 2-boyutlu kartezyen uzayında hareket etmektedirler. Denetimi yapılacak olan erkinlerin amacı hareketli bir hedefi yakalayıp etrafını sarmak ve etrafında geometrik bir şekil (oluşum, dizilim) oluşturmaktır. Bu eşgüdümlü görevi gerçekleştirmek için yapay potansiyel fonksiyonlar/alanlar ve kayan kip denetim yöntemi kullanılarak, yapıcı bir analizle merkezi olmayan, gerçek zamanlı bir denetim planı geliştirilecektir. Bu makalenin daha önce yapılmış çalışmalara katkısı, basit integratör ve tam-denetim modelleri için bulunmuş olan sonuçların, daha gerçekçi ve zor olan hız-kısıtlamalı model için geliştirilecek olmasıdır. Geliştirilecek olan denetim yordamının etkinliği; analitik olarak kanıtlanacak ve benzetimlerle sınanacaktır.

## 1. Giriş

Son yıllarda, biyolojik sistemlerden etkilenilerek öğrenilen ilkelerin denetim sistemlerine uyarlanması konusunda birçok araştırma yapılmaktadır. Araştırmacıların ve mühendislerin amacı biyolojik sistemlerden esinlenmiş denetim sistemleri geliştirmektir (bkz. [1, 2, 3, 4, 5]). Bu çalışmalar biyolojik sürülerin (bakteri kolonileri, kuş, balık ve memeli sürüleri) davranışlarını modellemekten biyolojik süreçleri taklit ederek çok-erkinli mühendislik problemleri çözen akıllı yöntemler geliştirmeye kadar uzanan geniş bir yelpazeyi kapsar. Biyolojik sistemleri mühendislik problemlerine uyarlama çalışmalarının çıkış noktası, bu sistemlerin çevrelerine son derece iyi uyum sağlamış başarılı sistemler olmalarıdır.

Yukarıda bahsedilmiş olan çalışmaların önemli bir kısmı birden fazla özerk erkinin dağılık işbirliği ve denetimi üstünedir [1, 2, 3, 4, 5]. Bir grup çok basit erkin, tek bir erkin için fazla karmaşık olabilecek görevleri eşgüdümlü çalışarak başarabilmektedirler. Ayrıca sürünün elemanlarından biri veya birkaçı arızalanıp, görevi devam ettiremeyecek duruma gelirse, kalanlar yeniden işbölümü yapıp görevi tamamlayabilmektedirler. Bu şekilde çalışan erkinler sistemin genel gürbüzlüğüne ve görevin başarıma olasılığını arttırmaktadır.

Bu makalede, özel bir dağılık eşgüdümlü ve denetim prob-

lemi olan hareketli bir hedefin özerk erkinlerden oluşan bir robot sürüsü tarafından eşgüdümlü takibi üzerine çalışılacaktır. Gerçekleştirilecek olan görev, çok-erkinli sistemler (sürüler) için,  $\mathbb{R}^2$ 'de belirli bir dizilimde hareket ederken, yine hareket halindeki bir hedefin etrafını sarmayı sağlayacak bir dağılık denetim stratejisi geliştirmektir.

Bu makalede daha önce [6, 7, 8]'de kullanılan basit integratör ve tam-denetimli erkin modeli yerine ikisinden de daha zor ve daha gerçekçi olan hız-kısıtlamalı model kullanılacaktır. Hız-kısıtlamalı model Bölüm 2'de detaylı olarak anlatılacaktır. Makalenin varolan çalışmalara katkısı; basit integratör ve tam-denetim modelleri kullanılarak elde edilen sonuçların (bkz. [7, 8]), hız kısıtlamalı model için geliştirilecek olmasıdır. Dikkat çekici bir husus da yapılacak olan geliştirilmenin modelle ilgili basit bir değişiklikten ibaret olmamasıdır ki; bunun sebebi de [7] ve [8] çalışmalarını için düşünülmüş olan tasarım yaklaşımının hız-kısıtlamalı modele doğrudan uygulanmasının mümkün olmasıdır.

Yukarıda bahsedilmiş olan takip görevi gerçekte iki alt-görevin birleşimidir. Alt-görevlerden biri; hareket eden hedefin takip edilmesi, diğeri ise geometrik dizilimin/oluşumun korunmasıdır. Bu iki alt-görevi aynı anda gerçekleştirebilmek için yapay potansiyel fonksiyonları ve kayan kip yöntemini temel alan bir dağılık denetim stratejisi izlenecektir. [7] ve [8]'deki çalışmalarda tasarlanmış olan denetim stratejisi bu makalede öngörülen hız-kısıtlamalı modele doğrudan uygulanmadığı için bu çalışmaya temel olarak [9] çalışmasında, toplanma ve dizilim davranışlarının denetimi için kullanılmış olan yapay potansiyel alan ve kayan kip tekniği yaklaşımı benimsenecektir.

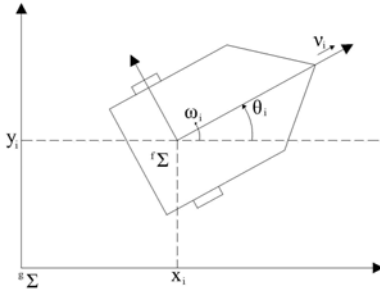
Bu makale şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2'de, öngörülen hız-kısıtlamalı erkin modeli ortaya konulacak ve üzerinde çalışılacak olan problem tanımlanacaktır. Bölüm 3'de, Bölüm 2'de tanımlanan problem için denetim tasarım yordamı açıklanacaktır. Daha sonra Bölüm 4'de, Bölüm 3'de geliştirilen denetim stratejisinin etkinliğinin denendiği bazı benzetim sonuçları sunulacaktır. Son olarak makale, Bölüm 5'de yapılacak bazı yorumlarla sonlandırılacaktır.

## 2. Hız-kısıtlı Model ve Sürü Takip Problemi

$M$  tane gezgin hız-kısıtlı robot (erkin) oluşan bir sürünün  $\mathbb{R}^2$ 'de hareket ettiği varsayalım ve erkinler  $A_1, \dots, A_M$  olarak belirtilsin. Her  $A_i$  ( $i \in \{1, \dots, M\}$ ) erkininin Şekil 1'de gösterilen konumlanması olduğu varsayalım ve hareket denklemlerinde aşağıdaki gibi olsun:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \cos(\theta_i), \\ \dot{y}_i &= v_i \sin(\theta_i), \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i, \\ \dot{v}_i &= \frac{1}{m_i} [F_i + f_{vi}], \\ \dot{\omega}_i &= \frac{1}{I_i} [\tau_i + f_{wi}] \end{aligned} \quad (1)$$

Burada  $x_i$  ve  $y_i$  erkin  $A_i$ 'nin kartezyen koordinatları cinsinden konumunu,  $\theta_i$  yönelme açısını,  $v_i$  doğrusal hızını ve  $\omega_i$  de açısal hızını belirtir.  $m_i$  ve  $I_i$  sıfırdan büyük sabitlerdir ve erkin  $A_i$ 'nin sırasıyla kütle ve eylemsizlik momentini göstermektedirler.  $A_i$  erkininin denetim girdileri kuvvet girdisi  $F_i$  ve tork girdisi  $\tau_i$ 'dir.  $f_{vi}$  ve  $f_{wi}$  ifadeleri bilinmeyen yan etkileri ve sistem belirsizliklerini temsil eder. Bunların her  $i \in \{1, \dots, M\}$  ve bilinen  $f_{vi}^+$  ve  $f_{wi}^+$  için  $|f_{vi}| < f_{vi}^+$  ve  $|f_{wi}| < f_{wi}^+$  şeklinde sınırlı oldukları varsayılmıştır. Ayrıca, her erkin  $A_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) için kütle  $m_i$  ve eylemsizlik momenti  $I_i$ 'nin kesin değeri bilinmemektedir, fakat, sınırlar  $0 < \underline{M} < m_i < \bar{M}$  ve  $0 < \underline{I} < I_i < \bar{I}$ 'nin bilindiği varsayılmıştır. Dikkat edilirse bu erkin modeli hem kinematik hem de dinamik hareket denklemlerini içermektedir. Bu, kinematik modele iki ayrı integrator eklemekle eş değerdir.



Şekil 1: Hız-kısıtlı Erkin  $A_i$ .

**Açıklama 1:** Bu makalede,  $\theta_i$  de dahil olmak üzere tüm açıların  $[0^\circ, 360^\circ)$  aralığından değer aldıkları varsayılacaktır. Bundan dolayı açıları ile ilgili tüm toplama işlemleri (mod  $360^\circ$ )'a göre yapılacaktır. Örneğin  $\theta_1 - \theta_2$  dendiğinde  $(\theta_1 - \theta_2) \pmod{360^\circ}$  kastedilmektedir. Benzer şekilde  $\dot{\theta}_i(t)$  şu şekilde tanımlanacaktır:

$$\dot{\theta}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\theta_i(t) - \theta_i(t - \Delta t)) \pmod{360^\circ}}{\Delta t}$$

Bu durumda tüm açıları bir çember üzerinde döndüğü için, herhangi bir süreksizlik oluşmamaktadır.

Bu çalışmada yapılmak istenen, hareketli bir hedefi, hareket denklemleri (1)'de verilen hız-kısıtlı bir robot sürüsüyle takip etmektir. Başka bir deyişle, denetim girdileri  $u_{i1} = F_i$  ve  $u_{i2} = \tau_i$  i öyle tasarlanmalı ki;  $M$  tane erkin oluşturulan sistem,

kaçan hedefi önceden belirlenmiş bir geometrik dizilim içinde hareket ederek yakalasin ve etrafını sarsın. Belli bir  $t$  anında,  $p_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]^T$ ,  $A_i$  erkininin  $i = 1, \dots, M$  konumunu,  $p_T(t) = [x_T(t), y_T(t)]^T$ 'de hedefin konumunu belirtiyor olsun. Bunlar ışığında çalışılacak olan problem şu şekilde ifade edilebilir:

**Problem 1 (Sürü Takip Problemi)**  $M$  sayıda erkin oluşturulan bir sürü olsun ve her bir  $A_i$  erkini,  $i \in \{1, \dots, M\}$ , denklem (1)'de verilen dinamiklerle hareket ediyor olsun. Her  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  erkininin, herhangi bir  $t$  anında, sürüdeki herhangi bir  $A_j$  erkininin,  $p_j(t)$  konumunu, kendi konumunu ve  $p_T(t)$  hedef konumunu algılayabildiği varsayalım.<sup>3</sup> Hedef çevrelendiğinde erkinler arası istenilen mesafeler  $\{d_{ij} | i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j\}$  olarak verilmiş olsun. Burada  $d_{ij}$  erkin  $A_i$  ile erkin  $A_j$  arasındaki arzu edilen mesafeyi göstermektedir. Bu mesafelerin geometrik uyumluluk içinde olduğu varsayılarak problem aşağıdaki gibi tanımlanır: Denetim girdileri

$$u_i = [u_{i1}, u_{i2}]^T = [F_i, \tau_i]^T$$

yi öyle tasarlanmalı ki her  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  erkini için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_T(t) \in \lim_{t \rightarrow \infty} \text{conv}\{p_1(t), \dots, p_M(t)\} \quad (2)$$

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p_j(t)\| - d_{ij} \right| \leq \epsilon, \forall i \neq j \in \{1, \dots, M\} \quad (3)$$

sağlansın. Burada  $\text{conv}\{p_1, \dots, p_M\}$ ,  $p_1, \dots, p_M$  sürüsünün oluşturduğu dışbükey yüzeyi/zarfı<sup>4</sup> belirtmektedir,  $\epsilon > 0$  ise önceden tanımlanmış küçük bir tolerans değeridir.

Problem 1'de, denklem (3) dizilim oluşturma/dizilimi koruma alt-görevini, denklem (2) ise hedefi takip/hedefin etrafını sarma alt-görevlerini ifade etmektedir. Problem 1'i çözmek için yapay potansiyel fonksiyonlar ve kayan kip yöntemi kullanılacaktır. Kullanılacak olan yapay potansiyel fonksiyon iki fonksiyonun birleşimi olacaktır. Bu fonksiyonlardan biri (2)'deki takip koşulunu, diğeri de (3)'deki dizilim koşulunu sağlamak için kullanılacaktır.

## 3. Denetleyici Tasarımı

### 3.1. Yapay Potansiyel Fonksiyonlar

Problem 1'in çözümü için erkinler arasında ve erkinler-hedef arasında itme-çekme ilişkisi oluşturmak için yapay potansiyel fonksiyonlar kullanılacaktır. Kullanılacak olan potansiyel fonksiyon takip ve dizilim alt-görevlerini beraber gerçekleştirmek zorundadır. Başka bir deyişle, denetleyici tasarım yordamında temel alınacak olan yapay potansiyel fonksiyon iki bölümden oluşur. Bu bölümler dizilim denetimi ve takip denetimi bölümleridir. Bu çalışmada, [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] çalışmalarında kullanılan fonksiyonlar tipinde bir potansiyel fonksiyon kullanılmıştır.

Kullanılan fonksiyon şu tiptedir:

$$J(p_1, \dots, p_M, p_T) = J_T(p_1, \dots, p_M, p_T) + J_F(p_1, \dots, p_M), \quad (4)$$

$$J_T(p_1, \dots, p_M, p_T) = w_T \sum_{i=1}^M J_{iT}(\|p_i - p_T\|),$$

$$J_F(p_1, \dots, p_M) = w_F \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M J_{ij}(\|p_i - p_j\|).$$

<sup>3</sup>Bu varsayımın sadece belirli bazı erkinleri algılayabildiği varsayımı olarak yumuşatılması mümkün.

<sup>4</sup>ing: convex hull

<sup>1</sup>ing: non-holonomic

<sup>2</sup>ing: agent

Burada,  $J_{iT}(\|p_i - p_T\|)$ ;  $A_i$  erkini ve hedef arasındaki potansiyeli,  $J_{ij}(\|p_i - p_j\|)$  de,  $A_i$  erkini ve  $A_j$  erkini arasındaki potansiyeli göstermektedir. Dikkat çekici bir nokta, hesaplanması gereken potansiyel fonksiyon değerlerinin sadece erkin-erkin ve erkin-hedef arası uzaklıklara bağlı olduğudur. Sıfırdan büyük  $w_T$  ve  $w_F$  sabitleri potansiyel fonksiyondaki alt-görevlerin (dizilim ve takip) erkinler açısından önemini (ağırlığını) belirlemektedir. Bu şekilde seçilmiş bir potansiyel fonksiyonla her erkin dizilimi korumaya çalışırken hedefi takip etmeye zorlanır.

Yukarıdaki açıklamalar ışığında, (4)'teki potansiyel fonksiyonlar  $J_{iT}$  ve  $J_{ij}$  şu şekilde seçilmiştir:

$$J_{iT}(\|p_i - p_T\|) = \frac{1}{4} \|p_i - p_T\|^4 \quad (5)$$

$$J_{ij}(\|p_i - p_j\|) = \frac{1}{2} \left[ a_{ij} \|p_i - p_j\|^2 + b_{ij} c_{ij} e^{-\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}}} \right] \quad (6)$$

Burada  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ , sıfırdan büyük, tasarımı ilgili sabitlerdir ve hangi değerleri almaları gerektiği bu bölümün devamında açıklanacaktır.

[10, 12, 9] çalışmalarında,  $J_{ij}$ , (6) gibi tanımlandığında, potansiyel fonksiyon  $J_F$ 'nin genel minimumunun (tek olmayabilir), istenilen erkinler arası mesafeler  $d_{ij}$  ile belirlenmiş olan dizilimde olacağı gösterilmiştir. Bunun sağlanması için (6) denklemindeki tasarım sabitleri  $a_{ij}, b_{ij}$  ve  $c_{ij}$  şu şekilde seçilmelidir:

$$\delta_{ij} \triangleq \sqrt{c_{ij} \ln \left( \frac{b_{ij}}{a_{ij}} \right)} = d_{ij}. \quad (7)$$

Yine [10, 12, 9] çalışmalarında olduğu gibi, erkinler  $\mathfrak{R}^2$ 'de

$$\dot{p}_i = -\nabla_{p_i} J_F(p),$$

denetim yasasına göre hareket ederlerse ve başlangıç koşullarının uygun olması şartı ile Problem 1'deki (3) denkleminin gerçekleşme şartını sağlarlar.

Potansiyel fonksiyonun (4), takip bölümü  $J_T$ 'ye (5) dikkat edilecek olursa, herhangi bir  $y \in \mathfrak{R}^2$  ve

$$h_{iT}(\|y\|) = \|y\|^2 \quad (8)$$

için

$$\nabla_y J_{iT}(\|y\|) = y h_{iT}(\|y\|) \quad (9)$$

olduğu görülmektedir.

Dikkat edersek  $h_{iT}(\|y\|)$ ,  $\|y\| = 0$  haricindeki tüm  $y$ 'ler için sıfırdan büyüktür. Sürekli durumda  $\nabla_{p_T} J(p_1, \dots, p_M, p_T) = 0$  olduğu durumda [7, 8]'deki çalışmalarda gösterildiği gibi

$$\sum_{i=1}^M p_i h_{iT}(\|p_i - p_T\|) = p_T \sum_{i=1}^M h_{iT}(\|p_i - p_T\|)$$

olur. Bu durumda  $\sum_{i=1}^M h_{iT}(\|p_i - p_T\|) \neq 0$  olduğu varsayılırsa (ki bu erkinlerin en azından birinin hedef ile aynı konumda olmadığı anlamına gelmektedir ve her zaman sağlanmaktadır) ve bu varsayım altında yukarıdaki ifade yeniden düzenlenirse

$$p_T = \frac{\sum_{i=1}^M p_i h_{iT}(\|p_i - p_T\|)}{\sum_{i=1}^M h_{iT}(\|p_i - p_T\|)}$$

elde edilir. Burada

$$\eta_i = \frac{h_{iT}(\|p_i - p_T\|)}{\sum_{i=1}^M h_{iT}(\|p_i - p_T\|)}, i = 1, \dots, M$$

şeklinde tanımlanırsa yukarıdaki denklem

$$p_T = \sum_{i=1}^M \eta_i p_i \quad (10)$$

biçiminde yazılabilir.

Yukarıdaki bilgiler ışığında ve seçmiş olduğumuz potansiyel fonksiyonda  $h_{iT}(\|y\|) \geq 0$  sağlandığından dolayı tüm  $i$ 'ler için  $0 \leq \eta_i \leq 1$  ve  $\sum_{i=1}^M \eta_i = 1$  sağlanır ve bu durum  $p_T \in \text{conv}\{p_1, \dots, p_M\}$  anlamına gelmektedir. Bu durumda Problem 1'deki (2) denkleminin sağlanması için  $t \rightarrow \infty$  iken  $\nabla_{p_T} J(p_1, \dots, p_M, p_T) = 0$  olması gerekmektedir.

### 3.2. Kayan Kip Yöntemi ile Denetleyici Tasarımı

Kayan kip yöntemi Bölüm 1'de de belirtildiği gibi çok-erkinli sistem eşgüdümü ve denetimi alanları da dahil olmak üzere bir çok uygulama alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Kayan kip tekniğinin yaygın kullanılmasının sebebi; sistem dinamiklerindeki belirsizlikleri bastırma ve gürbüzlük özellikleridir. Diğer taraftan, en yalın şekliyle uygulandığında kayan kip yönteminin olumsuz özellikleri çatırdama etkisi ve oluşması muhtemel yüksek şiddetli denetim işaretleridir [9]. Fakat bu olumsuzlukların integrasyon ve filtreleme gibi belirli yöntemlerle tamamen altedilebilmesi ya da etkilerinin azaltılabilmesi de mümkündür; fakat bunlar bu çalışmanın konusu değildir.

Tipik bir kayan kipli denetim tasarımında, modelleme belirsizliklerini ve bozulmaları bastırma için yeterince yüksek kazançlı, anahtarlamalı bir denetleyici kullanılır ve erkin dinamikleri kararlılaştırıcı bir yüzey üzerinde kalmaya zorlanır (kayma yüzeyi). Bu kazancın değeri; belirsizlik ve bozulmaların bilinen sınır değerleri kullanılarak hesaplanmaktadır.

Burdan sonra, Problem 1'in çözümü için her erkini (4), (5) ve (6)'de tanımlanmış olan potansiyel fonksiyon  $J$ 'nin ters eğiminde gitmeye zorlayacak bir kayan kipli denetleyici tasarlanacaktır. Bu durumda sağlanmak istenen koşul

$$\dot{p}_i = -\nabla_{p_i} J(p), \quad (11)$$

şeklinde dir. Burada

$$\nabla_{p_i} J(p) = \begin{bmatrix} J_{x_i}(p) \\ J_{y_i}(p) \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{p_i} J_T(p) = \begin{bmatrix} J_{Tx_i}(p) \\ J_{Ty_i}(p) \end{bmatrix}, \quad \nabla_{p_i} J_F(p) = \begin{bmatrix} J_{Fx_i}(p) \\ J_{Fy_i}(p) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın ve potansiyel fonksiyon  $J$ ,  $J_T$  ve  $J_F$ 'nin eğimini belirtiyor olsun, Dikkat edilirse,

$$\nabla_{p_i} J(p) = \nabla_{p_i} J_T(p) + \nabla_{p_i} J_F(p)$$

dir. Bu denklemlerdeki  $J_{Tx_i}$ ,  $J_{Ty_i}$ ,  $J_{Fx_i}$  ve  $J_{Fy_i}$  (4), (5) ve (6) kullanılarak,

$$J_{Tx_i} = w_T \|p_i - p_T\|^2 (x_i - x_T), \quad (12)$$

$$J_{Ty_i} = w_T \|p_i - p_T\|^2 (y_i - y_T), \quad (13)$$

$$J_{Fx_i} = w_F \sum_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \left[ a_{ij} - b_{ij} e^{-\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}}} \right] \quad (14)$$

$$J_{Fy_i} = w_F \sum_{j=1, j \neq i}^N (y_i - y_j) \left[ a_{ij} - b_{ij} e^{-\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}}} \right] \quad (15)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (1)'deki erkin dinamiklerini göz önünde bulundurarak erkinin potansiyelin ters eğimi üzerinde hareketini sağlamak için

$$-\nabla_{p_i} J(p) = \begin{bmatrix} -J_{x_i}(p) \\ -J_{y_i}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \cos \theta_i \\ v_i \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (16)$$

denklemlerinin sağlanmasına ihtiyaç vardır.

Başka bir deyişle

$$v_i = \|\nabla_{p_i} J(p)\|, \quad \theta_i = \text{atan2}(J_{y_i}(p), J_{x_i}(p)) \pmod{360^\circ} \quad (17)$$

sağlanmalıdır.

Erkin modeli (1)'deki girdiler  $u_{i1} = F_i$  ve  $u_{i2} = \tau_i$  kuvvet ve tork olup  $v_i$  ve  $\theta_i$  doğrudan uygulanamadığı için, aşağıdaki terimler

$$v_{id} \triangleq \|\nabla_{p_i} J(p)\|, \quad \theta_{id} \triangleq \text{atan2}(J_{y_i}(p), J_{x_i}(p)) \pmod{360^\circ} \quad (18)$$

olarak tanımlanarak bunlar istenilen hızı ve istenilen yönelme açısını ifade etmektedir. Bir başka deyişle  $v_{id}$  ve  $\theta_{id}$  değişkenleri  $v_i$  ve  $\theta_i$  için ulaşılmak istenilen referansları ifade etmektedirler.

Bundan sonraki amaç, erkinleri  $|v_i - v_{id}|$  ve  $|\theta_i - \theta_{id}|$  farklarının sifira yakınsamasını sağlayacak şekilde hareket etmeye zorlamaktır. Bu amaç doğrultusunda, [13, 14, 15] çalışmalarına benzer şekilde biri doğrusal hız  $v_i$ , biri de yönelme açısı  $\theta_i$  için olmak üzere iki adet kayma yüzeyi

$$s_{v_i} = v_i - v_{id} \quad (19)$$

$$s_{\theta_i} = c(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) + (\theta_i - \theta_{id}), \quad (20)$$

tanımlansın. Burada  $c$  sıfırdan büyük bir sabittir ( $c > 0$ ). Yukarıda verilmiş olan tanımlar sayesinde amaç,  $u_{i1}$  ve  $u_{i2}$  denetim girdilerini,  $s_{v_i} \rightarrow 0$  ve  $s_{\theta_i} \rightarrow 0$  asimptotik olarak ulaştıracak şekilde (ki ulaştığı zaman  $v_i \rightarrow v_{id}$  ve  $\theta_i \rightarrow \theta_{id}$  olur) tasarlamaya dönüşür. Denklem (20)'deki ek  $c(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id})$  terimi  $\theta_i$  ve  $u_{i2} = \tau_i$  arasındaki çift integratör bağlantısından kaynaklanır ki buda  $v_i$  ve  $u_{i1} = F_i$  arasındaki tek integratör bağlantısından farklıdır.

Kayan kipli denetim kuramından iyi bilindiği gibi eğer herhangi  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  sabitleri için ulaşma şartları

$$s_{v_i} \dot{s}_{v_i} \leq -\varepsilon_1 |s_{v_i}| \quad (21)$$

$$s_{\theta_i} \dot{s}_{\theta_i} \leq -\varepsilon_2 |s_{\theta_i}| \quad (22)$$

sağlanırsa, o zaman  $s_{v_i} = 0$  ve  $s_{\theta_i} = 0$  sınırlı zamanda sağlanır.

Denklem (21)'i sağlamak için ilk denetim girdisi  $u_{i1} = F_i$ 'yi

$$u_{i1} = -K_{i1} \text{sgn}(s_{v_i}). \quad (23)$$

şekilde seçelim. Burada kazanç  $K_{i1}$ 'i (ve bunun için de doğrusal hız  $v_i$  için tanımlanmış olan kayma yüzeyi  $s_{v_i}$ 'nin türevini) hesaplamak için  $\dot{v}_{id}$ 'nin bilinmesi gerekir. Bunun yerine bilinen bir  $\alpha(p) > 0$  için  $|\dot{v}_{id}| \leq \alpha(p)$  olduğu varsayalım. Buradaki  $\alpha(p)$ 'nin özellikleri tasarımcı tarafından seçilen potansiyel fonksiyonun özelliklerine bağlıdır. Başka bir deyişle potansiyel fonksiyon bu şekilde bir  $\alpha(p)$  olacak şekilde seçilebilir. [9]'daki çalışmada burda kullanılan  $J(p)$ 'ye benzeyen, belirli bir potansiyel fonksiyon için  $\alpha(p)$ 'nin elde edilmesi adım adım gösterilmiştir. Bu adımlar basit değişikliklerle bu çalışmada kullanılan potansiyel fonksiyona uygulanırsa:

$$\alpha(p) = 2\bar{\alpha}_F(p) \max_{i \in \{1, \dots, M\}} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^M \|G_F(p_i - p_j)\| \right) + \bar{\alpha}_T(p) \max_{i \in \{1, \dots, M\}} \left( \|G_T(p_i - p_j)\| \right)$$

olduğu görülür. Burda  $\bar{\alpha}_F(p)$ ,  $G_F(p_i - p_j)$ ,  $\bar{\alpha}_T(p)$ ,  $G_T(p_i - p_j)$  ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\bar{\alpha}_F(p) = \max_{k \in \{1, \dots, M\}} (\|\nabla_{p_k} J(p)\| + s_{v_k}(0)).$$

$$G_F(p_i - p_j) = aI + b \exp\left(-\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c}\right) \left(\frac{2}{c}(p_i - p_j)(p_i - p_j)^\top - I\right).$$

$$\bar{\alpha}_T(p) = \max_{k \in \{1, \dots, M\}} (\|\nabla_{p_k} J(p)\| + s_{v_k}(0), \gamma_T).$$

$$G_T(p_i - p_T) = 2(p_i - p_T)(p_i - p_T)^\top + \|p_i - p_T\|^2 I.$$

Yukarıda  $\bar{\alpha}_T(p)$ 'nin ifadesinde bulunan  $\gamma_T$  hedefin hızının üzerindeki bilinen bir sınırdır. Bir başka deyişle bu çalışmada bilinen bir  $\gamma_T$  için  $\|\dot{p}_T\| \leq \gamma_T$  sağlandığı varsayılmıştır.

Denklem (23)'teki  $u_{i1}$  denetleyicisi kullanılarak bulunan  $s_{v_i}$ 'nin zamana göre türevi

$$\dot{s}_{v_i} = -\frac{K_{i1}}{m_i} \text{sgn}(s_{v_i}) + \frac{1}{m_i} f_{vi} - \dot{v}_{id}$$

ve

$$\begin{aligned} s_{v_i} \dot{s}_{v_i} &= s_{v_i} \left( -\frac{K_{i1}}{m_i} \text{sgn}(s_{v_i}) + \frac{1}{m_i} f_{vi} - \dot{v}_{id} \right) \\ &= -\frac{K_{i1}}{m_i} |s_{v_i}| + \frac{1}{m_i} s_{v_i} f_{vi} - s_{v_i} \dot{v}_{id} \\ &\leq -\left( \frac{K_{i1}}{M} - \frac{1}{M} f_{iv}^+ - \alpha(p) \right) |s_{v_i}| \end{aligned} \quad (24)$$

olur. Buradan  $K_{i1}$  kazancını

$$K_{i1} \geq \bar{M} \left( \alpha(p) + \frac{f_v^+}{M} + \varepsilon_1 \right) \quad (25)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilirse (21) denklemi sağlanmış olur ve  $s_{v_i} = 0$  kayma yüzeyine sınırlı zamanda ulaşılır.

Benzer şekilde ikinci kayma yüzeyi için denetleyici

$$u_{i2} = -K_{i2} \text{sgn}(s_{\theta_i}) \quad (26)$$

şeklinde seçilirse  $s_{\theta_i}$ 'nin zamana göre türevi

$$\dot{s}_{\theta_i} = -c \frac{K_{i2}}{I_i} \text{sgn}(s_{\theta_i}) + \frac{c}{I_i} f_{wi} - c\ddot{\theta}_{id} + \omega_i - \dot{\theta}_{id} \quad (27)$$

olur ve

$$\begin{aligned} s_{\theta_i} \dot{s}_{\theta_i} &= s_{\theta_i} \left( -\frac{cK_{i2}}{I_i} \text{sgn}(s_{\theta_i}) + \frac{c}{I_i} f_{wi} - c\ddot{\theta}_{id} + \omega_i - \dot{\theta}_{id} \right) \\ &\leq -\left( \frac{cK_{i2}}{I} - \frac{c}{I} f_w^+ - c|\ddot{\theta}_{id}| - |\omega_i| \right) |s_{\theta_i}| \end{aligned} \quad (28)$$

sağlanır. Buradan  $K_{i2}$  kazancı

$$K_{i2} \geq \frac{\bar{I}}{c} \left( \frac{c}{\bar{I}} f_w^+ + c|\ddot{\theta}_{id}| + |\omega_i| + \varepsilon_2 \right) \quad (29)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilirse, (22) denkleminin sağlanacağı ve (20) denklemindeki ikinci kayma yüzeyi  $s_{\theta_i}$ 'nin sınırlı zamanda  $s_{\theta_i} = 0$  olacağı açıktır.

$s_{\theta_i}$ 'nin değerini hesaplamak için  $\theta_{id}$ 'nin zamana göre türevinin hesaplanması gerekir. Bu türev

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{id} &= \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{J_{y_i}}{J_{x_i}} \right)}{1 + \left( \frac{J_{y_i}}{J_{x_i}} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} (J_{y_i}) \cdot J_{x_i} - \frac{d}{dt} (J_{x_i}) \cdot J_{y_i}}{(J_{x_i})^2 + (J_{y_i})^2}\end{aligned}$$

bağıntısı kullanılarak bulunabilir. Burada (30) denklemini açık bir şekilde yazabilmek için (12)–(15) denklemlerine ek olarak  $J_{Tx_i}, J_{Ty_i}, J_{Fx_i}$  ve  $J_{Fy_i}$ 'nin zamana göre türevlerinin bilinmesi gerekir. Bu türevler (12)–(15) kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (J_{Tx_i}) &= w_T \left[ 3(x_i - x_T)^2 + (y_i - y_T)^2 \right] (\dot{x}_i - \dot{x}_T) \\ &+ 2(x_i - x_T)(y_i - y_T)(\dot{y}_i - \dot{y}_T),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (J_{Ty_i}) &= w_T \left[ (x_i - x_T)^2 + 3(y_i - y_T)^2 \right] (\dot{y}_i - \dot{y}_T) \\ &+ 2(x_i - x_T)(y_i - y_T)(\dot{x}_i - \dot{x}_T),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (J_{Fx_i}) &= w_F \sum_{j=1, j \neq i}^N \left[ a_{ij} - b_{ij} \left( 1 - \frac{2(x_i - x_j)^2}{c_{ij}} \right) \exp \left( -\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}} \right) \right] (\dot{x}_i - \dot{x}_j) \\ &+ \left[ b_{ij} \frac{2(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{c_{ij}} \exp \left( -\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}} \right) \right] (\dot{y}_i - \dot{y}_j),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (J_{Fy_i}) &= w_F \sum_{j=1, j \neq i}^N \left[ a_{ij} - b_{ij} \left( 1 - \frac{2(y_i - y_j)^2}{c_{ij}} \right) \exp \left( -\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}} \right) \right] (\dot{y}_i - \dot{y}_j) \\ &+ \left[ b_{ij} \frac{2(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{c_{ij}} \exp \left( -\frac{\|p_i - p_j\|^2}{c_{ij}} \right) \right] (\dot{x}_i - \dot{x}_j).\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Dikkat edilmesi gereken bir konu denetleyici kazancı  $K_{i2}$ 'yi hesaplarken  $|\dot{\theta}_{id}|$  ve  $|\ddot{\theta}_{id}|$ 'nin de hesaplanmasının gerekmesi izlenimidir. Fakat, aslında bu iki değer de aynen  $|\dot{v}_{id}| \leq \alpha(p)$  durumunda olduğu gibi sınırlıdır. Bu sınırları  $|\dot{\theta}_{id}| \leq \beta_1$  ve  $|\ddot{\theta}_{id}| \leq \beta_2$  olarak ifade edersek, bu terimlerin değerlerinin bilinmesine gerek kalmadan  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  sınırları kullanılarak  $K_{i2}$  hesaplanabilir.

Vurgulanması gereken bir özellik, bu çalışmada anlatılan kayan kip yöntemi temelli denetim stratejisinin, kütle  $m_i$  ve eylemsizlik momenti  $I_i$ 'deki belirsizliklere ve sistem belirsizliklerine ve bozulmalar  $f_{vi}$  ve  $f_{wi}$ 'ye rağmen istenilen erkin davranışını garanti etmesidir. Bu varsayımlar çok gerçekçidir.

Tüm yüzeylerde kayan kip oluşuktan (ki sınırlı zamanda oluşmaktadır) ve erkinler (11) denklemlerine göre hareket etmeye başladıktan sonra ve potansiyel fonksiyon, (4), (5), (6), (10) ve (7) denklemlerini sağlayacak şekilde seçilmişse, Problem 1'in de çözüleceği kesindir. Önemli bir konu, kayan kip oluşuktan sonra,  $v_i = v_{id}$ 'ye ulaşacağı fakat  $\theta_i = \theta_{id}$  ulaşılmayacağıdır. Aslında, kayan kip oluşuktan sonra  $\theta_i \rightarrow \theta_{id}$ 'ye üstel hızda yakınsadığı ve yakınsama hızının kayma yüzeyinin eğimi  $-\frac{1}{c}$ 'ye bağlı olduğu görülmektedir. Bundan dolayı,  $c$  sabiti mümkün olduğunca küçük seçilerek hızlı yakınsama ve kararsızlıkların önlenmesi sağlanır. Son olarak,  $c$ 'nin değerindeki azalma,  $K_{i2}$  kazancını arttırmayı gerektirir.

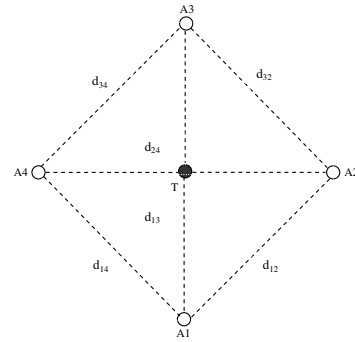
## 4. Benzetim Sonuçları

Bu bölümde tasarlanan denetim stratejisinin etkinliğini sınavacak benzetim sonuçları sunulacaktır. Benzetimlerde (4), (5), (6) ile ifade edilmiş olan potansiyel fonksiyonu  $w_T = 1$  ve  $w_F = 3$  değerleri ile kullanılacaktır.

Hedef benzetim uzayında şu kinematiklerle hareket etmektedir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_T(t) &= 0.25, \text{ (m)} \\ \dot{y}_T(t) &= \sin(0.25t) \text{ (m)}\end{aligned}$$

Tüm erkinler için erkin parametreleri  $\bar{M}_i = \bar{I}_i = 4$  ve  $\underline{M}_i = \underline{I}_i = 1$ 'dir. Ayrıca berlirsizlikler ve yan etkiler üst sınır değerleri de  $f_{vi}^+ = f_{wi}^+ = 3$ 'dir.



Şekil 2: İstenilen Dizilim

İstenilen erkin dizilimi Şekil 2'de gösterilen tam  $K_4$  çizgesidir. Bu şekle göre istenilen erkinler arası mesafeler

$$d_{12} = d_{14} = d_{34} = d_{32} = d_{24} = 2, \quad d_{13} = 2\sqrt{3} \text{ (m)}$$

olur.

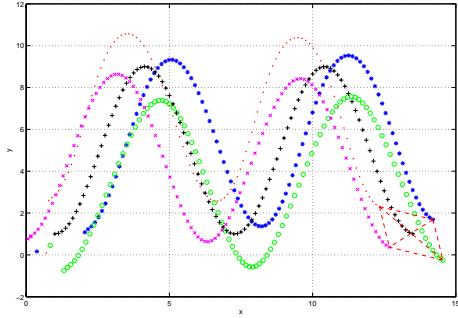
Potansiyel fonksiyonun istenilen mesafelerde minimumunun olması için  $b_{ij} = 20$  ve  $c_{ij} = 1$  seçilmiştir;  $a_{ij}$  ise [9] çalışmasındaki gibi  $a_{ij} = b_{ij} \exp \left( -\frac{d_{ij}^2}{c_{ij}} \right)$  bağıntısını kullanarak hesaplanmıştır. Bu parametrelerle sistem sınındığında erkinlerin istenilen dizilimde hareket ederken hedefi yakalaması ve etrafını sarması beklenmektedir.

Denetim girdilerinin hesaplanmasında kullanılan sgn fonksiyonu, teoride iyi çalışmasına rağmen pratikte süresiz karakteristiğinden dolayı yüksek frekans çattırdamaları sebep olabilir. sgn fonksiyonunu düzgünleştirerek ve çattırdamayı azaltmanın çeşitli yolları vardır. Bu çalışmada yeğlenen teknik, sgn fonksiyonu yerine  $\tanh(\gamma y)$  fonksiyonunun kullanılmasıdır.  $\tanh(\gamma y)$  fonksiyonundaki  $\gamma$  sabiti bir düzgünleştirme parametresidir ve  $\tanh$  fonksiyonunun sgn fonksiyonuna ne kadar benzeyeceğini belirler. Seçilen düzgünleştirme sabitleri  $\gamma_1 = \gamma_2 = 50$ 'dir.

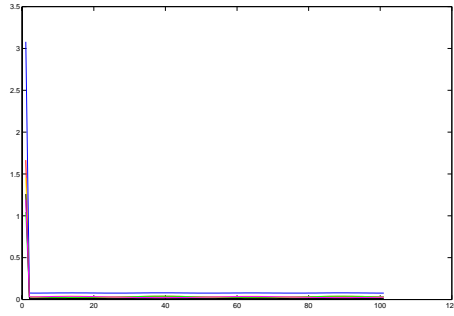
Yukarıda değinilmiş olan tüm parametre değerleri kullanılarak yapılan benzetimlerde önerilen yöntemin (2)–(3) ile tarif edilen takip problemi için başarıyla yakınsadığı gözlemlenmiştir.

Şekil 3, sürü üyelerinin ve hedefin yollarını göstermektedir. Rastgele ilk konumlar seçilerek benzetim başlatıldığında sürünün çabucak istenilen geometrik şekli oluşturup hedefi yakaladığı ve etrafını sardığı daha sonra da bu şekilde harekete devam ettiği gözlemlenmiştir.

Şekil 4 sürü üyelerinin hareketinin istenildiği gibi (3) koşulunu sağladığını göstermektedir.



Şekil 3: Sürü ve Hedefin Yolları ((2) şartının sağlandığını gösteren şekil).



Şekil 4: (3) şartının sağlandığını gösteren şekil.

## 5. Sonuçlar

Bu çalışmada hareketli bir hedefin, hız kısıtlamalı dinamikleri olan bir erkin sürüsü tarafından geometrik dizilim oluşturularak takibi, yakalanması ve etrafının çevrelenmesi ele alınmıştır. Çalışmada yapay potansiyel fonksiyonlar ve kayan kipli denetim tekniği kullanılarak, erkin dinamiklerinde belirsizlikler ve bozulmalar olduğu halde, sürünün hedefi yakalayıp etrafını çevreleyeceği ve etrafında istenilen dizilimi oluşturacağı gösterilmiştir. Bu çalışma birkaç farklı yönde genişletilebilir. İlk olarak tüm erkinlerin, kendisi dışındaki diğer erkinlerin tümünün konumunu algılayamadığı durum ele alınabilir. Bir diğer açılım çok yüksek genlikli ve frekanslı denetim girdilerini önlemek için çadırda problemi üzerine eğilmektir. Erkinlerin aralarındaki uzaklıkları ölçerken hatasız bilgi alamadıkları durumlar altında sistem incelenebilir.

## 6. Teşekkür

V. Gazi ve M. İ. Köksal'ın çalışmaları TÜBİTAK (Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu) tarafından 104E170 sayılı proje kapsamında ve Avrupa Komisyonu tarafından 6. Çerçeve Programı 045269 sözleşme numaralı özel amaçlı araştırma projesi kapsamında desteklenmektedir. B. Fidan'ın çalışmaları Avustralya Hükümeti Haberleşme, Bilgi Teknolojisi ve Sanat Departmanı ve Avustralya Araştırma Konseyi'nin *Backing Australia's Ability* inisiyatifi ve Bilişim ve Haberleşme Teknolojileri Mükemmeliyet Merkezi Programı tarafından finanse edilen National ICT Australia tarafından desteklenmektedir. R. Ordóñez F33615-01-2-3154 Nolu proje ile AFRL/AFOSR

tarafından desteklenmektedir.

## 7. Kaynakça

- [1] T. Balch and R. C. Arkin, "Behavior-based formation control for multirobot teams," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Cilt 14, Sayı 6, sf. 926–939, Aralık 1998.
- [2] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions," *Proc. IFAC World Congress*, Barcelona, İspanya, Haziran 2002.
- [3] V. Gazi and B. Fidan, "Coordination and control of multi-agent dynamic systems: Models and approaches," *Proceedings of the SAB06 Workshop on Swarm Robotics Swarm Robotics*, E. Sahin, W. M. Spears, and A. F. T. Winfield, Eds., Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 4433, sf. 71-102, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] C. W. Reynolds, "Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model," *Comp. Graph.*, Cilt 21, Sayı 4, sf. 25–34, 1987.
- [5] H. Yamaguchi, "A cooperative hunting behavior by mobile-robot troops," *The International Journal of Robotics Research*, Cilt 18, Sayı 8, sf. 931–940, Eylül 1999.
- [6] V. Gazi, "Swarm aggregations using artificial potentials and sliding mode control," *IEEE Trans. on Robotics*, Cilt 21, Sayı 6, sf. 1208–1214, Aralık 2005.
- [7] J. Yao, R. Ordonez, and V. Gazi, "Swarm tracking using artificial potentials and sliding mode control," *Proc. Conf. Decision Contr.*, San Diego, CA, ABD, Aralık 2006, sf. 4670–4675.
- [8] J. Yao, R. Ordonez, and V. Gazi, "Swarm tracking using artificial potentials and sliding mode control," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, yayına kabul edildi.
- [9] V. Gazi, B. Fidan, Y. S. Hanay, and M. İ. Köksal, "Aggregation, foraging, and formation control of swarms with non-holonomic agents using potential functions and sliding mode techniques," *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences (ELEKTRİK)*, Cilt 15, Sayı 2, sf. 149-168, Temmuz 2007.
- [10] V. Gazi and K. M. Passino, "Stability analysis of swarms," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Cilt 48, Sayı 4, sf. 692–697, Nisan 2003.
- [11] V. Gazi and K. M. Passino, "Stability analysis of social foraging swarms," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Part B*, Cilt 34, Sayı 1, sf. 539–557, Şubat 2004.
- [12] V. Gazi and K. M. Passino, "A class of attraction/repulsion functions for stable swarm aggregations," *Int. J. Control*, Cilt 77, Sayı 18, sf. 1567–1579, Aralık 2004.
- [13] J. Guldner and V. I. Utkin, "Stabilization on non-holonomic mobile robots using lyapunov functions for navigation and sliding mode control," *Proc. Conf. Decision Contr.*, Lake Buena Vista, Florida, ABD, Aralık 1994, sf. 2967–2972.
- [14] J. Guldner, V. I. Utkin, H. Hashimoto, and F. Harashima, "Tracking gradients of artificial potential fields with non-holonomic mobile robots," *Proc. American Control Conf.*, Seattle, Washington, ABD, Haziran 1995, sf. 2803–2804.
- [15] J. Guldner and V. I. Utkin, "Tracking the gradient of artificial potential fields: Sliding mode control for mobile robots," *Int. J. Control*, Cilt 63, Sayı 3, sf. 417–432, 1996.